BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Terminologi Graf

Teori graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan dengan tepat. Graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Rinaldi Munir, 2010) Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), yang dalam hal ini:

$V =$ himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*)

$= \{v_1,\ v_2, \dots, v_n\}$ dan

$E =$ himpunan sisi (*adges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul

$= \{e_1,\ e_2, \dots, e_n\}$

atau dapat ditulis singkat notasi $G = (V, E)$.

Definisi tersebut menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu buah. Graf ini dinamakan graf trivial.

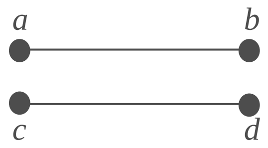
Simpul pada graf dapat diberi nama dengan huruf atau bilangan asli atau gabungan keduanya. Sisi yang menghubungkan simpul v_i dengan simpul v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i, v_j) atau dengan lambang $e_1, e_2, \dots$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul v_i dengan simpul v_j , maka e dapat ditulis sebagai $e = (v_i, v_j)$.

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori bergantung pada sudut pandang pengelompokkan. Pengelompokkan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan jumlah titik, berdasarkan orientasi arah pada sisi atau berdasarkan keterhubungan titik.

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis:

a. Graf Sederhana (*Simple Graph*)

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda dinamakan graf sederhana. Contoh:



Gambar 2.1 Contoh Graf Sederhana

b. Graf Tak Sederhana (*Unsimple Graph*)

Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu graf ganda dan graf semu. Graf yang mengandung sisi ganda dinamakan graf ganda. Graf yang mengandung gelang dinamakan graf semu. Contoh:

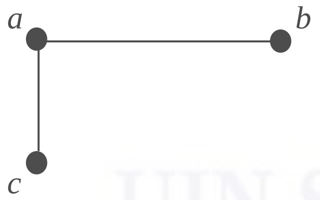
(a) (b)

Gambar 2.2 (a) Contoh Graf Ganda; (b) Contoh Graf Semu

Berdasarkan keterhubungan titik pada suatu graf, graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis:

a. Graf Terhubung (*Connected Graf*)

Graf terhubung jika untuk setiap pasang titik u dan v didalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v dan v ke u. Contoh:



Gambar 2.3 Contoh Graf Terhubung

b. Graf Tak Terhubung (*Disconnected Graph*)

Graf tak terhubung apabila untuk setiap pasang titik u dan v didalam himpunan V tidak terdapat lintasan dari u ke v dan v ke u. Contoh:

Gambar 2.4 Contoh Graf Tak Terhubung

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis:

a. Graf Berarah (*Directed Graph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.

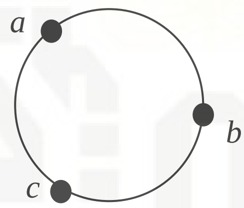
b. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut sebagai graf tak berarah.

Beberapa bentuk graf yang sering digunakan dalam penelitian:

a. Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

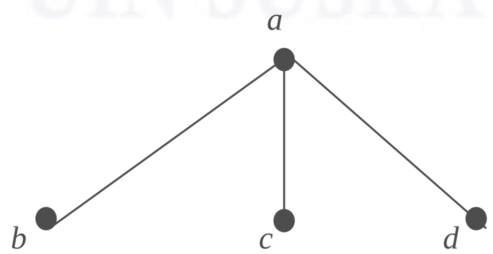
Graf lingkaran adalah graf terhubung reguler yang berderajat dua. Contoh:



Gambar 2.5 Contoh Graf Lingkaran

b. Graf Pohon

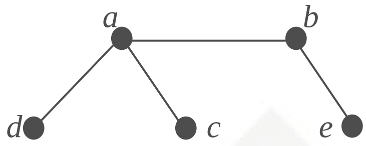
Graf pohon adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Contoh:



Gambar 2.6 Contoh Graf Pohon

c. Graf Hutan

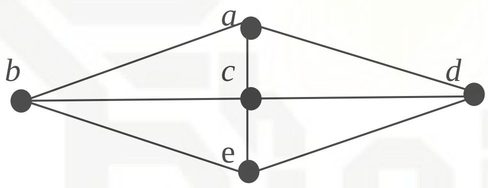
Graf hutan adalah graf tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graf terhubung tersebut adalah pohon. Contoh:



Gambar 2.7 Contoh Graf Hutan

d. Graf Bipartite

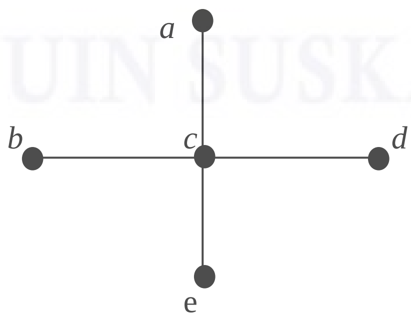
Suatu graf *G* disebut graf bipartite apabila *V(G)* merupakan gabungan dari 2 himpunan tak kosong V_1 dan V_2 dan setiap garis dalam *G* menghubungkan suatu titik dalam V_1 dengan titik dalam V_2. Apabila dalam graf bipartite setiap titik dalam V_1 berhubungan dengan setiap titik dalam V_2, maka grafnya disebut graf bipartite lengkap (Siang, 2009). Contoh:



Gambar 2.8 Contoh Graf Bipartite Lengkap

e. Graf Bintang

Graf bintang dinotasikan dengan S_n, adalah suatu graf bipartite lengkap $K_{1,n}$ (Bondy, 1976 dikutip oleh Ramdani, 2014). Contoh

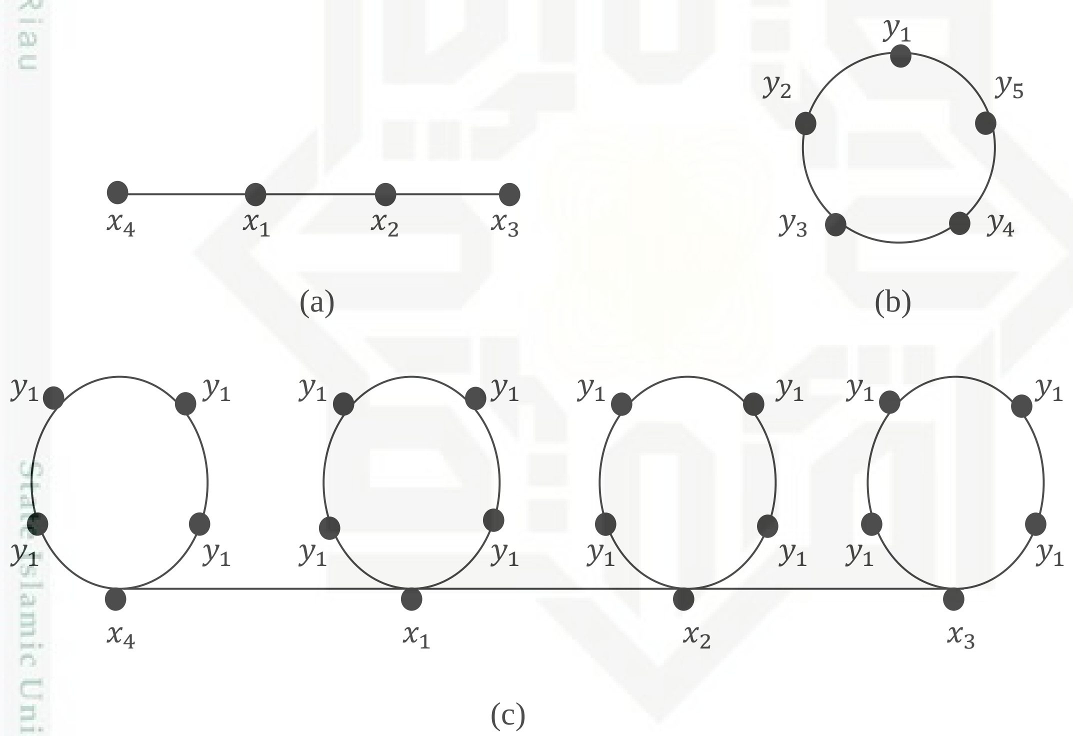


Gambar 2.9 Contoh Graf Bintang

Ada beberapa operasi yang dapat dikenalkan pada dua graf atau lebih. Salah satu bentuk operasi yang biasa digunakan adalah hasil kali *comb*.

Definisi 2.2 (Saputro, 2013) Diberikan graf *G* dan *H* adalah dua graf terhubung. Misalkan titik *x* (titik cangkok) adalah titik di graf *H*. Hasil kali *comb* dari *G* dan *H*, dinotasikan dengan $G \rhd H$, adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan pada G dan menggandakan H sebanyak $|V(G)|$ dan mencangkokkan penggandaan graf *H* ke-*i* di titik *x* ke titik ke-*i* dari graf *G*.

Berikut ini merupakan contoh graf $P_4 \rhd C_5$



Gambar 2.10 (a) Graf P_4; (b) Graf C_5 ; (c) Graf $P_4 \rhd C_5$

2.2 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik/sisi) dengan bilangan bulat positif. Apabila domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Apabila domain dari pemetaan adalah sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Dan disebut pelabelan total (*total labeling*), yaitu apabila domainnya titik dan sisi. Pelabelan graf telah banyak dikaji, diantaranya adalah pelabelan *graceful*, pelabelan cermin, pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan prima dan pelabelan *k*-*graceful*, pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur total.

Bača, Jendroľ, Miller, dan Ryan memperkenalkan pelabelan-k total tak teratur yang memiliki dua tipe yakni pelabelan-k total tak teratur sisi dan pelabelan-k total tak teratur titik. Berikut ini diberikan definisi dari pelabelan total tak teratur titik.

Definisi 2.3 (Bača dkk, 2007) Suatu pelabelan total $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ disebut pelabelan$-k$ total tak teratur titik jika untuk setiap dua titik yang berbeda x dan y di $V(G)$ memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$ dimana $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$.

Bobot (*weight*) dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Bobot dari titik v dengan pelabelan λ adalah $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$. Sedangkan bobot dari sisi uv adalah $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$.

Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan penerapannya, terutama pada sektor komunikasi, transportasi, penyimpanan data komputer, pemancar frekuensi radio. Pada sistem pengaturan frekuensi radio, permintaan yang lebih besar atas pelayanan *wireless* dan terbatasnya frekuensi yang tersedia membutuhkan penggunaan yang efisien.

Masalah yang muncul adalah bagaimana agar gelombang signal yang digunakan dapat efisien dan tidak terjadi interferensi. Topik pengoptimalan label pada graf sedemikian hingga membuat setiap bobot titiknya berbeda dipelajari melalui nilai total ketakteraturan titik (*tvs*), pada sistem pengaturan frekuensi radio, *tvs* dapat berupa jarak terkecil yang memungkinkan dua pemancar untuk melakukan transmisi data tanpa mengalami interferensi.

Nilai total ketakteraturan titik pada graf G (*total vertex irregularity strength*) dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah nilai k minimun atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik.

Bača dkk., menunjukkan batas bawah dan batas atas dari nilai total ketakteraturan titik untuk sembarang graf.

Teorema 2.1 (Nur Rahmah, 2016) Untuk $m \geq 2$ dan m bilangan genap,

$$tvs(P_m \rhd C_4) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$$

Bukti:

Derajat titik terkecil dari graf $P_m \rhd C_4$ adalah 2. Perhatikan bahwa jumlah titik yang berderajat dua pada $P_m \rhd C_4$ adalah $3m$. Supaya mendapatkan pelabelan optimal, titik-titik yang berderajat terkecil dilabeli sedemikian sehingga bobot untuk titik-titik berderajat 2 tersebut dimulai $3, 4, 5, \dots, 2m + 2$. Sementara bobot titik graf $P_m \rhd C_4$ yang berderajat 2 adalah jumlah dari 3 buah bilangan bulat positif yang disebut label, yaitu 1 label titik itu sendiri dan 2 label sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Oleh karena itu, kita dapatkan label terbesar minimum yang digunakan yaitu $\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ dan tidak mungkin lebih kecil dari $\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$. Jadi, kita dapatkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_4) \geq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$. Kemudian akan dibuktikan bahwa $tvs(P_m \rhd C_4) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ dengan menunjukan adanya pelabelan total tak teratur titik pada graf $P_m \rhd C_4$ menggunakan label terbesar $\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$.

Untuk $m \geq 2$ dan m bilangan genap, maka ikuti aturan pemberian nama titik-titik pada graf $P_m \rhd C_4$ berikut:

a. Pemberian nama titik-titik pada graf P_m

Beri nama titik-titik ke, $\frac{m}{2}, \frac{m-2}{2}, \frac{m-4}{2}, \dots, \frac{m+2}{2}, \frac{m+4}{2}, \frac{m+6}{2}, \dots, m, 1$ pada graf P_m secara berurutan dengan label $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m$.

b. Pemberian nama titik-titik pada graf C_4

Titik-titik pada graf C_4 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{m-2}{2}$ di beri nama berlawanan dengan arah jarum jam dimana y_i^k dengan $k = 1,2,3.$ Untuk titik-titik pada graf C_4 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = \frac{m+2}{2}, \frac{m+4}{2}, \dots, m$ diberi nama sesuai dengan arah jarum jam dimana y_i^k dengan $k = 1,2,3$.

Sehingga himpunan titik dari graf $P_m \rhd C_4$ adalah:

$V(P_m \rhd C_4) = \{x_i, y_i^k | 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 3\}$,

Dan himpunan sisi dari graf $P_m \rhd C_4$ adalah:

$E(P_m \rhd C_4) = \{x_i y_i^k | 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1\} \cup \{y_i^k y_i^{k+1} | 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 2\} \cup \{x_i x_j | 1 \leq i \leq m-1 \text{ dan } 2 \leq j \leq m\}$.

Didefinisikan $r_i = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ untuk $1 \leq i \leq m$. Rumus Pelabelan secara umum untuk $P_m \rhd C_4$ dengan $m \geq 6$, sebagai berikut:

a. Pelabelan titiknya adalah:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} 3m - 2r_m & ; \text{jika } i = 1 \\ 3m + i - 2r_i - 2r_m + 3 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq \frac{m-2}{2} \\ \frac{7m+6}{2} - 3r_m & ; \text{jika } i = m \\ 3m + i - 2r_m - 2r_i + 5 & ; \text{jika } \frac{m}{2} \leq i \leq m-2 \\ \frac{5m+8}{2} - r_{m-1} - r_m & ; \text{jika } i = m-1 \end{cases}$$

$\lambda(y_i^k) = i \quad ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 3$

a. Pelabelan sisinya adalah:

$$\lambda(x_i y_i^k) = \begin{cases} i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 3 \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k y_i^{k+1}) = \begin{cases} i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 2 \end{cases}$$

$\lambda(x_i x_{i+1}) = r_m \quad ; \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{m-2}{2} \text{ atau } \frac{m}{2} \leq i \leq m-2$

$\lambda\left(x_{\frac{m-2}{2}} x_m\right) = r_m$

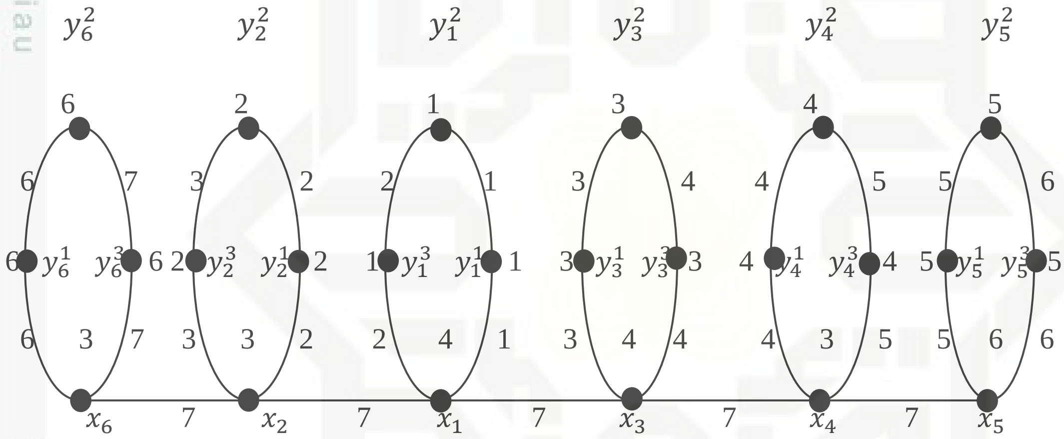
$\lambda\left(x_1 x_{\frac{m}{2}}\right) = r_m$

Dilihat dari definisi bahwa fungsi λ adalah suatu pemetaan dari $V(P_m \rhd C_m) \cup E(P_m \rhd C_m)$ ke $\left\{1,2,\dots,\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil\right\}$. Bobot titik dari graf $P_m \rhd C_4$, $wt(y_i^k)$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 3 sampai ke $3m + 2$. Sedangkan $w(x_i)$ yaitu bilangan bulat positif berurutan yang dimulai dari $3m + 3$

sampai ke $4m + 2$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik dalam pelabelan total tak teratur titik dari graf $P_m \rhd C_n$ memiliki bobot yang berbeda sehingga λ adalah pelabelan total tak teratur titik pada $P_m \rhd C_4$. Dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_4) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$. ■

Contoh:

Jika $m = 6$ maka didapatkan $tvs(P_6 \rhd C_4) \geq \left\lceil \frac{3(6)+2}{3} \right\rceil = 7$. Pelabelan graf $P_6 \rhd C_4$ pada Gambar 2.11 berikut merupakan pelabelan yang optimal dengan menggunakan rumus pelabelan sisi dan pelabelan titik yang telah didapat diatas.



Gambar 2.11 Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada Graf $P_6 \rhd C_4$

Pada Gambar 2.11 label maksimum yang digunakan adalah 7. Perhitungan bobot titiknya sebagai berikut:

$wt(y_1^1) = \lambda y_1^1 + \lambda x_1 y_1^1 + \lambda y_1^1 y_1^2 = 1 + 1 + 1 = 3$

$wt(y_1^2) = \lambda y_1^2 + \lambda y_1^1 y_1^2 + \lambda y_1^2 y_1^3 = 1 + 1 + 2 = 4$

$wt(y_1^3) = \lambda y_1^3 + \lambda x_1 y_1^3 + \lambda y_1^2 y_1^3 = 1 + 2 + 2 = 5$

$wt(y_2^1) = \lambda y_2^1 + \lambda x_2 y_2^1 + \lambda y_2^1 y_2^2 = 2 + 2 + 2 = 6$

$wt(y_2^2) = \lambda y_2^2 + \lambda y_2^1 y_2^2 + \lambda y_2^2 y_2^3 = 2 + 2 + 3 = 7$

$wt(y_2^3) = \lambda y_2^3 + \lambda x_2 y_2^3 + \lambda y_2^2 y_2^3 = 2 + 3 + 3 = 8$

$wt(y_3^1) = \lambda y_3^1 + \lambda x_3 y_3^1 + \lambda y_3^1 y_3^2 = 3 + 3 + 3 = 9$

$wt(y_3^2) = \lambda y_3^2 + \lambda y_3^1 y_3^2 + \lambda y_3^2 y_3^3 = 3 + 3 + 4 = 10$

$wt(y_3^3) = \lambda y_3^3 + \lambda x_3 y_3^3 + \lambda y_3^2 y_3^3 = 3 + 4 + 4 = 11$

$wt(y_4^1) = \lambda y_4^1 + \lambda x_4 y_4^1 + \lambda y_4^1 y_4^2 = 4 + 4 + 4 = 12$

$wt(y_4^2) = \lambda y_4^2 + \lambda y_4^1 y_4^2 + \lambda y_4^2 y_4^3 = 4 + 4 + 5 = 13$

$wt(y_4^3) = \lambda y_4^3 + \lambda x_4 y_4^3 + \lambda y_4^2 y_4^3 = 4 + 5 + 5 = 14$

$wt(y_5^1) = \lambda y_5^1 + \lambda x_5 y_5^1 + \lambda y_5^1 y_5^2 = 5 + 5 + 5 = 15$

$wt(y_5^2) = \lambda y_5^2 + \lambda y_5^1 y_5^2 + \lambda y_5^2 y_5^3 = 5 + 5 + 6 = 16$

$wt(y_5^3) = \lambda y_5^3 + \lambda x_5 y_5^3 + \lambda y_5^2 y_5^3 = 5 + 6 + 6 = 17$

$wt(y_6^1) = \lambda y_6^1 + \lambda x_6 y_6^1 + \lambda y_6^1 y_6^2 = 6 + 6 + 6 = 18$

$wt(y_6^2) = \lambda y_6^2 + \lambda y_6^1 y_6^2 + \lambda y_6^2 y_6^3 = 6 + 6 + 7 = 19$

$wt(y_6^3) = \lambda y_6^3 + \lambda x_6 y_6^3 + \lambda y_6^2 y_6^3 = 6 + 7 + 7 = 20$

$wt(x_1) = \lambda x_1 + \lambda x_1 y_1^1 + \lambda x_1 y_1^3 + \lambda x_1 x_2 + \lambda x_1 x_3 = 4 + 1 + 2 + 7 + 7 = 21$

$wt(x_2) = \lambda x_2 + \lambda x_2 y_2^1 + \lambda x_2 y_2^3 + \lambda x_1 x_2 + \lambda x_2 x_6 = 3 + 2 + 3 + 7 + 7 = 22$

$wt(x_3) = \lambda x_3 + \lambda x_3 y_3^1 + \lambda x_3 y_3^3 + \lambda x_1 x_3 + \lambda x_3 x_4 = 4 + 3 + 4 + 7 + 7 = 25$

$wt(x_4) = \lambda x_4 + \lambda x_4 y_4^1 + \lambda x_4 y_4^3 + \lambda x_4 x_3 + \lambda x_4 x_5 = 3 + 4 + 5 + 7 + 7 = 26$

$wt(x_5) = \lambda x_5 + \lambda x_5 y_5^1 + \lambda x_5 y_5^3 + \lambda x_4 x_5 = 6 + 5 + 6 + 7 = 24$

$wt(x_6) = \lambda x_6 + \lambda x_6 y_6^1 + \lambda x_6 y_6^3 + \lambda x_2 x_6 = 3 + 6 + 7 + 7 = 23$

Dengan demikian pelabelan pada Gambar 2.10 terlihat bahwa bobot setiap titik berbeda yaitu:

$wt(y_1^1) \neq wt(y_1^2) \neq wt(y_1^3) \neq wt(y_2^1) \neq wt(y_2^2) \neq wt(y_2^3) \neq wt(y_3^1) \neq wt(y_3^2) \neq wt(y_3^3) \neq wt(y_4^1) \neq wt(y_4^2) \neq wt(y_4^3) \neq wt(y_5^1) \neq wt(y_5^2) \neq wt(y_5^3) \neq wt(y_6^1) \neq wt(y_6^2) \neq wt(y_6^3) \neq wt(x_1) \neq wt(x_2) \neq wt(x_3) \neq wt(x_4) \neq wt(x_5) \neq wt(x_6)$.

Jadi, pelabelan ini adalah pelabelan-7 total tak teratur titik pada $P_6 \rhd C_4$.